Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

23/10/19

§1. Πράξεις - Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Το σώμα των μιγαδικών: $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

με: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$

Ιδιότητες:

→ Το $(x, 0) \equiv x$ $\quad x \in \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

→ Φανταστική μονάδα: $i = (0, 1)$

$\left(i^2 = (\quad)\cdot(\quad) = (-1, 0) = -1 \right.$: το i έχει ρίζα στο $\left. \mathbb{C} \right)$

→ Παραστάσεις των μιγαδικών:

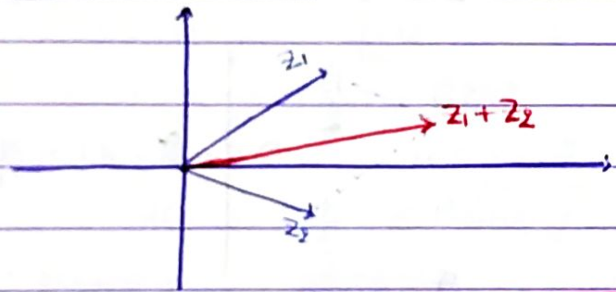
$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)\cdot(0, y)$

$= x + iy$

άρα $z = (x, y) = x + iy$

→ Συζυγής μιγαδικών: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

→ Γεωμετρική ερμηνεία πρόσθεσης:



→ Τύπος Euler: $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

Τότε $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

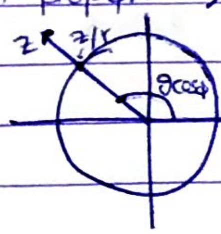
$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$

→ Όλες οι ιδιότητες δυνάμεων ισχύουν

→ Πολική μορφή: $z = x + iy$, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(Το 0 δε γράφεται σε πολική μορφή)

διότι $\left| \frac{z}{r} \right| = \frac{|z|}{r} = 1$



$\frac{z}{r} = \frac{x}{r} + i \cdot \frac{y}{r}$

Τότε: $\frac{z}{r} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$= \cos\theta + i\sin\theta$

$\Leftrightarrow z = r(\cos\theta, \sin\theta)$

$\Leftrightarrow \boxed{z = re^{i\theta}}$ πολική μορφή

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $\vartheta = \arg z \Leftrightarrow \cos\vartheta = \frac{x}{r}$, $\sin\vartheta = \frac{y}{r}$

→ Αν $z = |z| e^{i\vartheta}$, $w = |w| e^{i\varphi}$ τότε:

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot e^{i(\varphi+\vartheta)}$$

Γεωμετρική ερμηνεία πολλ/σμού:

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ Έστω $\tau = \sqrt{3} + i$, $|\tau| = 2$

Τότε, $\cos\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\vartheta = \frac{1}{2}$

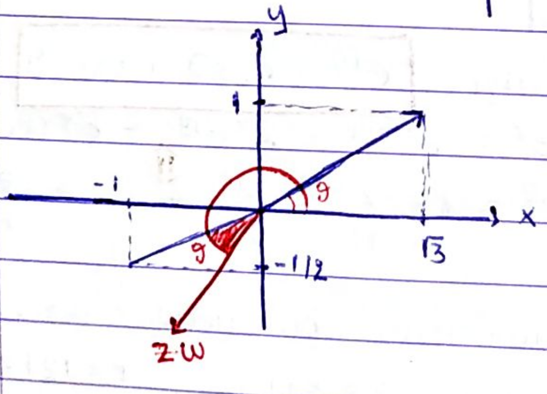
$\vartheta = \frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$, $|w| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\vartheta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\vartheta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vartheta = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$



· $|\tau w| = \sqrt{2}$

· $\text{Arg}\,\tau w = \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ $(+2\kappa\pi)$

→ Έστω $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Ο συζυγής $\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta$

$= \cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)$

άρα $\boxed{\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}}$

Τότε: $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$,

$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$

HW : Ν.δ.ο. $\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \sin b\cdot\cos a$

Υποδ.: $e^{i(a+b)} = e^{ia}\cdot e^{ib}$

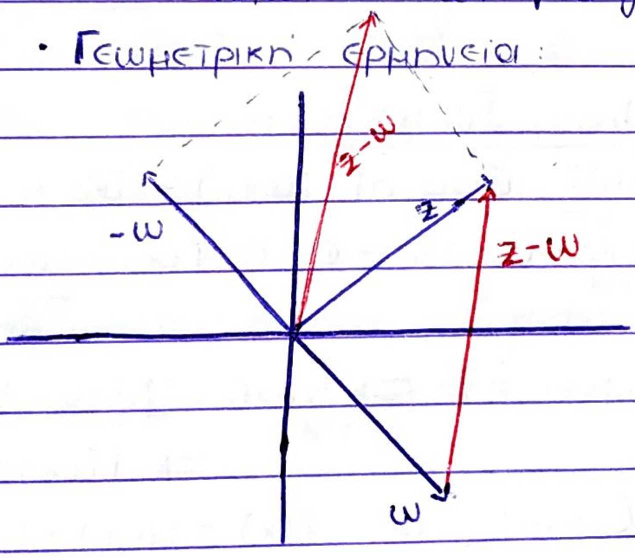
§2. Συγκλίσεις - Όρια

→ Τύπος Απόστασης:

Αν $z = a + i\beta$, $w = \gamma + i\delta$ τότε:

$d(z,w) = |z-w| = \sqrt{(a-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2}$

• Γεωμετρική ερμηνεία:



• Ισχύει ότι: $|a-\gamma| \le |z-w|$ κ. $|\beta-\delta| \le z-w$ κ.

$\boxed{|z-w| \le |a-\gamma| + |\beta-\delta|}$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: α) $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$: $a_n \to a$

$\overset{\text{ορ.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|a_n - a| < \varepsilon$ $^{n \geq n_0}$

$\overset{\Pi\rho.}{\iff} |a_n - a| \to 0$

b) $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$: $z_n \to z$

$\overset{\text{ορ.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|z_n - z| < \varepsilon$, $^{n \geq n_0}$

$\overset{\Pi\rho.}{\iff} |z_n - z| \to 0$

__Πρόταση__: Έστω $\tau_n = a_n + i b_n$, $\tau = a + i b$. Τότε:

$\tau_n \to \tau \iff a_n \to a$ κ. $b_n \to b$

__Αποδ.__:

$\Rightarrow$) $\tau_n \to \tau \iff |\tau_n - \tau| \to 0$

Επειδή $|a_n - a| < |\tau_n - \tau|$

$|b_n - b| < |\tau_n - \tau|$

από θ. Ισοσυγκλινουσών $a_n \to a$ κ. $b_n \to b$

$\Leftarrow$) HW

→ __Σύγκλιση Συναρτήσεων__:

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $x_0 \in [a, b]$

(Ειδικά αν $f \to \mathbb{C}$: $f(x) = \underbrace{u(x)}_{Re f} + i \underbrace{v(x)}_{Im f}$)

• $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f$: $|x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Επίσης, αν $f(x) = u(x) + i v(x)$, ισχύει:

• $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = Re\, l$ κ.

$\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = Im\, l$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $f, f_n : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (Ομοιόμορφη σύγκλιση)

$f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |f_n - f| < \varepsilon \ \forall x \in [a,b]$

$\Longleftrightarrow \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, με $n \geq n_0$

$\Longleftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0$,

όπου $d(f_n, f) = \|f_n - f\|_\infty$

$= \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $f_n \xrightarrow[\text{σημείο}]{\text{κατά}} f \Longleftrightarrow f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in [a,b]$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \forall x, \ \exists n_0 = n_0(x) :$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(x)$

→ Αν $f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$

$\not\Leftarrow$

Σειρές

• **ΟΡΙΣΜΟΣ** : (σειρά - σύγκλιση σειράς)

Έστω $\{a_n\}_{n=1,2,\dots} \subset \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Σειρά των όρων της $\{a_n\}$ που συμβολίζεται με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ονομάζεται η ακολουθία των αθροισμάτων:

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Άθροισμα σειράς λέγεται το όριο της S_n, αν ∃:

$$\lim \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} S_n \to S, \quad n \to \infty$$

• Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία

Τότε $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \Longleftrightarrow \lim_{k \to \infty} (a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k})$ (αν $\exists \in \mathbb{R}$)

(ουρά ακολουθίας)

Πρόταση: Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \Rightarrow$ i) $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \to 0$, $n \to \infty$

ii) $a_n \to 0$, $n \to \infty$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:** α) Αν $f_n(x) \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$:

Σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ονομάζω την ακολουθία συνθέσεων $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $n = 1, 2, \dots$

b) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \overset{ορ.}{\iff} S_n(x) \xrightarrow{κ.σ.} f(x)$.

c) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{ομοιόμ.} f(x) \overset{ορ.}{\iff} S_n(x) \xrightarrow{ομοιόμ.} f(x)$

Κριτήριο